IA : TAMBA | Prof : M. DRAME
Lycée : KOUMPENTOUM | Classe : $2^{nde}S$
Année : 2019-2020 | Chapitre : Vecteur et barycentre

SERIE D'EXERCICES

EXERCICE 1 :

1. Soit ABCD un parallélogramme.

-Construire E et F tels que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AD}$.

-Démontrer que les points C, E et F sont alignés.

2. Soit ABC un triangle.

-Construire les points D et E définis par :

$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

-Démontrer que les points A, D et E sont alignés.

EXERCICE 2 :

Soit ABC un triangle.

a. Construire le point M, tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
b. Démontrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
c. Construire N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ en déduire que A, M et N sont alignés.

EXERCICE 3 :

OAB est un triangle, D et C les points tels que :

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

1. Démontrer que O est le milieu de [CD].

2. E et F sont les points tels que : $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Démonter que ABFE est un parallélogramme.

EXERCICE 4 :

A,B,C,D sont quatre points.

1. Construire les points E,F tels que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
2. Montrer que $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

EXERCICE 5 :

ABCD est un parallélogramme, I et J les points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

Soit G le point tels que : : $\overrightarrow{IG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$

Construire la figure et monter que les points A, C, G sont alignés.

EXERCICE 6:

Dans un triangle ABC, on considéré par M le milieu de [AB], par I celui de [MC] et K le point tel que

$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

1. Montrer que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

2. En déduire que les points A , I, K sont alignés.

EXERCICE 7 :

ABCD est un parallélogramme de centre O, E est le milieu de [AB], F celui de [CD]. Les droites (DE) et (BF) coupent la droite (AC) en L et M respectivement.

1. Montrer que L est centre de gravité du triangle ABD. En déduire que $\overrightarrow{0L} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$
2. Prouver que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ et que O est le milieu de [ML]

EXERCICE 8 :

Soit ABC un triangle non rectangle ; O le centre et r le rayon de son cercle circonscrit. A', B', C' milieux respectifs de [BC], [CA) et [AB].

1. On considère le point H défini par : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
2. Montrer que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{2OA'}$; $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{2BA'}$ et $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{2OC'}$
3. b) En déduire que : (AH) ⊥ (BC) et (BH) ⊥ (CA) . Que représente alors le point H ?

EXERCICE 9 :

ABCD est un parallélogramme de centre O.

1. Définir vectoriellement et placer les points I, J et K définis par :
   I= bar $\{(A,5);(B,-2)\}$; J= bar $\{(B,1);(C,-2)\}$;
   K= bar $\{(C,-5);(D,2)\}$ et L=bar $\{(D,-1);(A,2)\}$.
2. Démontrer que IJKL est un parallélogramme de centre O.

EXERCICE 10 :

Soient A et B deux points distincts et G le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 2)$.

Soit M un point n'appartenant pas à (AB).

1. Construire les points A', B' et S tels que :

$\overrightarrow{MA'} = 3\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{MB'} = 2\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'}$

2. Montrer que (MS) et (AB) sont sécante en G

EXERCICE 11 :

Soit ABC un triangle, A' le barycentre des points pondérés $(B, -1)$ et $(C, 2)$; B' le barycentre de $(A, 3)$ et $(C, 2)$ et C' le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, -1)$.

1. Placer les points A', B' et C'.
2. Soit G le barycentre de $(A, 3)$, $(B, -1)$ et $(C, 2)$.
3. Montrer que : $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA'} = 0$.
4. En déduire que G est un point de (AA').
5. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en G.

EXERCICE 12 :

Soit ABC un triangle quelconque.

G= bar $\{(A, 3); (B, 3)\}$; E = bar $\{(B, 3); (C, 1)\}$

F = bar $\{(A, 3); (C, 1)\}$; I = bar $\{(A, 3); (B, 3); (C, 1)\}$

1. Démontrer que :

-A, I et E sont alignés.

-B, I et F sont alignés.

-C, I et G sont alignés.

2. Que peut-on en déduire pour les droites (AE), (BF) et (CG) ?

Soit E' = bar $\{(B, 3); (C, -1)\}$.

3. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{E'G}$ et $\overrightarrow{GF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

4. En déduire que E', F et G sont alignés.

5. Montrer Que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

EXERCICE 13 :

Soient A et B deux points tels que AB = 10cm.

1. Construire le barycentre I de $(A, 2)$ et $(B, 3)$ et le barycentre J de $(A, 3)$ et $(B, 2)$.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que :
$$\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\|$$

EXERCICE 14 :

Soit ABCD un rectangle. On note I le milieu de$[AB]$ et E le centre de gravité du triangle ABC.

1. Construire le barycentre F de $(C, 1)$ et $(D, 3)$.
2. Démontrer que le milieu G de $[ED]$ est le barycentre de $(A, 1)$,$(B, 1)$,$(C, 1)$ et $(D, 3)$.
3. Démontrer que G appartient à la droite (IF).
4. Soit K le point défini par : $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.
Montrer que le milieu de $[BC]$ appartient à la droite (GK).

EXERCICE 15:

Soient un triangle ABC rectangle en A et tels que AB=4cm et AC=6cm.

1. Placer le point G tel que : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, calculer AG.
2. Démontrer que G = bar $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ avec a, b et c des réels à déterminer.
3. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tel que : $\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 10$.

Montrer que Γ passe par C et A.

EXERCICE 16 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a = 4cm.

Soit D le point défini par : $3\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

1. Exprimer D comme barycentre de A, B et C affectes de coefficients à préciser.
2. Soit I le milieu de $\overrightarrow{AC}$.

a- Montrer que D est barycentre de B et I affectes de coefficients à préciser.

b- En déduire que D est le symétrique de G par rapport à I (G étant le centre de gravité du triangle ABC).

3. a) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{3}$.

b- Démontrer que G appartient à (E) et construire (E).

EXERCICE 17 :

Soient A, B et C trois points distincts ; a, b et c trois réels avec a + b + c≠ 0 et G=bar $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$.

1. Démontrer que les points pondérés $(A, 2a + 1)$, $(B, 2b - 2)$ et $(C, 2c + 1)$ admettent un barycentre qu'on appellera K.
2. a) Donner une relation vectorielle définissant k et en déduire : $a\overrightarrow{KA} + b\overrightarrow{KB} + c\overrightarrow{KC} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}}{2}$
b) En déduire que G et K sont confondus si et seulement si B est le milieu du segment $\overrightarrow{AC}$.